Regulæ

simpliciter differentiandi generales,

quas

Consent. Ampliss. Ord. Philosoph.,

Præside

CAROLO JOH. D:S HILL,

Math. Prof. Reg. & Ord.

Pro Laurea

miti Bonorum censuræ

offert

A. G. TAUSON,

Blekingus.

In Acad. Carol. die XVIII Jun. MDCCCXLI.

h. p. m. s.

LUNDÆ,

typis excudit CAROLUS FR. BERLING,

Universitatis Typographus,

MDCCCXLI.

Quoniam vero quæstio de functione functionis derivanda latius patet, eaque materiæ, cujus præcipue heic tradendæ nobis est animus, valde affinis: ei operam aliquam impendamus. Sint igitur $fx = z$ & $\varphi z = u$, atque $f(x+y) = z^1$ & $\varphi(z^1) = u^1$, quæraturque valor explicitus ipsius u^1, sub forma $u + yu_1 + y^2u_2 + \ldots$ Hæc jam res dupliciter efficitur, vel enim pro z sufficiamus suum valorem fx, ut sit $u = \varphi(fx)$ similiterque $u^1 = \varphi(f(x+y))$, ideoque u & u^1 aliqua ipsorum x & $(x+y)$ functio, cujus sit (φf) vel F signum, ita ut $u = (\varphi f)x = Fx$, atque $u^1 = (\varphi f)(x+y) = F(x+y)$ sit, ideoque mox ex Theor. Tayloreo $u^1 = Fx + yF_1x + y^2F_2x + \ldots$ seu $u^1 = Fx + y\partial Fx + y^2\underset{c}{\partial^2}Fx + \ldots$ ideoque propositæ formæ, si u pro Fx vel $(\varphi f)x$ scribis. Vel etiam prævie $f(x+y)$ evolvamus, ut sit $z^1 = fx + yf_1x + y^2f_2x + \ldots$ seu $= fx + y\partial fx + \ldots$, ideoque $u^1 = \varphi z^1 = \varphi(fx + yf_1x + y^2f_2x + \ldots) = \varphi(fx + y\partial fx + \ldots)$, ubi ardua adhuc restat quæstio de functione φ hujusmodi polynomii $X + yX_1 + y^2X_2 + \ldots$ ulterius evolvenda, ut eandem formam nanciscatur, seu secundum y rite ordinata sit. Nec hæc vero declinanda est, cum sæpe accidere potest, ut functiones f & φ jam diu tam notæ sint, ut omnes suas derivatas invenire liceat, indeque ars functionem magis compositam Fx derivandi facile eliciatur.

Jam vero ostendimus, reliquas derivatas in *prima* virtualiter contineri, quam ideo ante omnia definiamus. Quem in finem duos priores ipsius u^1 terminos quæramus, idque ponendo $fx = X$ & $f_1x + yf_2x + \ldots = \xi$, ideoque $u^1 = \varphi(X + y\xi)$, cujus quidem primi termini ex Theor. Tayl. sunt $\varphi X + y\xi . \varphi_1 X + (y\xi)^2\varphi_2 X + \ldots$, (scripto sc. $y\xi$ pro y), quorum tertius, utut y^2 continens, nihil omnino ad terminum $y\partial Fx$ quæsitum contribuere potest, quin imo ex secundo omne, quod y^2 vel altiorem ipsius potestatem continet, rejiciamus, ideoque ex ξ tantum f_1x retinere debemus, ut jam ipsius u^1 termini quæsiti sint $\varphi X + y . f_1x . \varphi_1 X$, ideoque $f_1x . \varphi_1(fx) = \partial Fx$ (seu F_1x

vel $(\varphi f)_1 x)$; unde regula: *Functio functionis* (Fx vel) $\varphi f x$ *derivatur ducendo derivatam* ($f_1 x$) *interioris* (fx) *in illam* ($\varphi_1 f x$) *exterioris, quatenus hœc ut functio illius spectatur.* Sic ex. gr. erit $\partial(fx)^n = n\,\overline{fx}^{n-1}\partial fx = n\,\overline{fx}^{n-1} f_1 x$. Idem et ita exprimi potest: $(\partial \overline{\varphi f})x = \partial fx.(\partial\varphi)(fx)$, seu facto $fx = z$ erit $\partial(\varphi z) = \partial z.\varphi_1 z$ & $\partial z = f_1 x$, quæ quidem formula a priori illa $\partial\varphi z = \varphi_1 z$ in eo differt, ut jam adsit factor ∂z, nec quidem hæ conveniunt nisi $\partial z = 1$ fuerit, id quod in casu generali locum habere nequit, qui tamen ad priorem redit, cum $fx = x$, ideoque $z = x$, sumitur, quo quidem casu aperte $\partial z = f_1 x = 1$ est.

Sed etiam in priori casu talis factor virtualiter adest. Si enim $f(x+y)$ evolvenda fuerit secundum potestates altiores ipsius y, hoc omni sæpe sensu careret, ut cum x & y solidum significarent, quo casu nemo, quid horum quadratum vel altior potentia sibi velit, comprehenderet, hujusve rei imaginem animo conciperet. In tali igitur similibusque casibus quæstio ita varianda est, ut pro y scribatur $r\xi$, exsistente r numero aliquo, ξ vero quantitate ejusdem generis ac x, seu hujus quasi *unitas*, deindeque id requiratur, ut $f(x+r\xi)$ secundum potentias numeri r evolvatur, (quod nihil absoni habet), seu sub forma $f\overline{x+r\xi} = X + rX_1 + r^2X_2 + \ldots$ exhibeatur.

Hoc vero aliquanto generaliori casu adhuc valebit Theorema Tayloreum, seu idem eodem fere modo demonstrabitur, ut scilicet sit $f(x+r\xi) = fx + r\xi.\partial fx + (r\xi)^2.\underset{c}{\partial^2} fx + (r\xi)^3.\underset{c}{\partial^3} fx + \ldots$, omnino enim idem ita reperitur, ac quod inde scribendo $r\xi$ pro y obtinetur. Quoniam vero jam coefficientes ipsius r sub calculum cadunt, hi sua signa sibi exposcunt, quæ sint $\underset{c}{d} fx$, $\underset{c}{d^2} fx$ &c., ut jam sit $f(x+r\xi) = fx + r\underset{c}{d} fx + r^2\underset{c}{d^2} fx + r^3\underset{c}{d^3} fx + \ldots$, tumque $\underset{c}{d} fx$ vel dfx *differentiale* ipsius fx dicitur, reliquaque *diff. altiora divisa.* Sicuti vero $\underset{c}{\partial^n} fx = \frac{\partial^n fx}{1.2.3..n}$, sic $\underset{c}{d^n} fx = \frac{d^n fx}{1.2.3..n}$ poni poterit, eritque

$d^{n+1}fx = d(d^n fx)$, quod *differentiale ordinis* $n+1$ vocabitur. Facto vero $fx = a.x$, erit $f(x+r\xi) = a(x+r\xi)$ atque $= ax + rd(ax) + ..$, ideoque necessario $d(ax) = a\xi$ atque $dx = \xi$, si $a = 1$; itemque $d^2\overline{ax} = o$. *Differentiale* igitur argumenti arbitrarii x nihil nisi hujus unitas arbitraria (ξ) est, quam et $= 1$ facere licet, tumque $d^n x$ & $\partial^n x$ idem omnino valebunt, seu derivata ipsius x nihil erit nisi differentiale, in quo $dx = 1$ factum est. Ulterius vero, quia $d^2(ax) = o$, erit $d^2x = o$, $d^3x = o$ &c.; quatenus scil. hoc ad evolutionem Tayloream seu Binomii $f(x+rdx) = fx + rdfx + \frac{r^2d^2fx}{1.2} + \frac{r^3d^3fx}{1.2.3} + \ldots$ referimus, quæ, facto $fx = z$, in hanc migrat $f(x+rdx) = z^1 = z + rdz + \frac{r^2d^2z}{1.2} + \frac{r^3d^3z}{1.2.3} + \ldots = z + rdz + r^2\underset{c}{d^2}z + \ldots$

Sin vero, ut modo, $\varphi(z + rdz + r^2\underset{c}{d^2}z + r^3\underset{c}{d^3}z + ..)$ secundum r evolveremus, foret sane similiter $\varphi(z + r\zeta) = \varphi z + r\zeta\partial\varphi z + r^2\zeta^2\underset{c}{\partial^2}\varphi z + \ldots$, vel etiam $= \varphi z + rd\varphi z + r^2\underset{c}{d^2}\varphi z + \ldots$, si ζ & dz idem valerent, sin vero $\zeta = dz + r\underset{c}{d^2}z + r^2\underset{c}{d^3}z + \ldots$ foret, prævie hujus potentiæ evolvendæ essent, totumque secundum r ordinandum, ut tandem $\varphi z^1 = Z + rZ_1 + r^2Z_2 + \ldots$ obtineretur. Nihil vero impedit, quominus & hanc seriem per eadem signa exprimamus, ut universim sit $\varphi z^1 = \varphi z + rd\varphi z + r^2\underset{c}{d^2}\varphi z + r^3\underset{c}{d^3}\varphi z + \ldots$, sive $z^1 = z + rdz$ sive $z^1 = z + rdz + r^2\underset{c}{d^2}z + \ldots$ fuerit, dummodo simul ad hanc differentiam attendamus, esse altero casu dz constans (ideoque $d^2z = o = d^3z$ &c.) alteroque variabile, (tumque d^2z, d^3z &c. quæcunque). Hoc vero casu loco theorematis binomialis Taylorei *polynomiale Arbogastii* obtinebimus. Hæc vero ipsa res magis corroboratur, si animadvertimus, nos jam invenisse $\varphi z^1 = u^1 = Fx + y\partial Fx + y^2\underset{c}{\partial^2}Fx + \ldots$, ideoque, (quia $y = r\xi = rdx$, & $dx\partial Fx = dFx$, $\overline{dx}^n\underset{c}{\partial^n}Fx = \underset{c}{\partial^n}Fx$), $\varphi z^1 = Fx + rdFx + r^2\underset{c}{d^2}Fx + r^3\underset{c}{d^3}Fx + \ldots$, ubi dx constans habetur. Jam vero $z = fx$ & $Fx = \varphi z$ posuimus, ideoque sane

erit $dFx = d\varphi z$, $d^2Fx = d^2\varphi z$ &c., & igitur $\varphi z^1 = \varphi z + rd\varphi z + \frac{r^2 d^2\varphi z}{1.2} + \ldots$, sicuti in primo casu, cum hac sola differentia, ut in altero dz, in alteroque dx pro constante habeatur. His jam igitur evictum est, *evolutionem functionis φ binomii cujusdam $z + rdz$ ad differentiationem cum constante argumenti (z) differentiale* (dz=Const.), *ipsam vero functionis φ polynomii cujusdam $z + rdz + r^2 \underset{c}{d^2} z + r^3 \underset{c}{d^3} z + \ldots$ ad differentiationem cum differentiale argumenti z* (seu primi termini) *variabile semper revocari.* Totum igitur indefinite *evolvendi & differentiandi negotium* duplex est, nempe vel *binomiale* vel *polynomiale*, quibus utrisque aliter differentiale primum aliterque reliqua universim perquiruntur.

Illius utrisque vero fere communis inveniendi est modus. Invenimus enim $d(\varphi x) = \partial\varphi x . dx = \varphi_1 x . dx$, cum dx constans, ostendimusque $d\varphi z = dz . \varphi_1 z$*), cum $z = fx$ & $\partial z = \partial fx = f_1 x$, ideoque $dz = f_1 x . dx$ = variabile; erit igitur hoc casu $d\varphi z = \partial\varphi z . dz = \varphi_1 z . f_1 x . dx = \varphi_1 z . dz$, ut igitur ita universim sit $d\varphi z = \varphi_1 z . dz$, sive dz constans, sive variabile fuerit. Quo postremo quidem casu ∂z derivatam ejus functionis, qualis z ipsius x habetur, indicat.

Jam vero pro hac communi *differentiatione*, *regulæ* derivandi antea propositæ, factore tantum dx adscito, valebunt.

---

*) Observandum vero hoc $\partial\varphi z$ seu ∂u (si $\varphi z = u$), in quo u non tam ut functio ipsius z, quam potius ipsius x consideratur, optime per $\underset{x}{\partial} u$ vel $\underset{x}{\partial}\varphi z$ ab illo $\varphi_1 z$ vel $\partial\varphi z$, in quo φz ipsius z habetur functio, seu $\partial\varphi z$ ex evoluta $\varphi(z+y)$ obtinetur, distingui, ut sc. sit $\underset{fx}{\partial}\varphi fx = \underset{f}{\partial}\varphi fx = \varphi_1 fx$ & $\underset{x}{\partial}\varphi fx = \varphi_1 fx . f_1 x = \underset{f}{\partial}\varphi fx . \underset{x}{\partial} fx$.

Scil. 1) $d(a.\varphi x)=a.d\varphi x$, si a constans est.

2) $d(\varphi x+a)=d\varphi x$.

3) $d(\varphi x+\psi x)=d\varphi x+d\psi x$.

4) $d(fx.\varphi x)=fx.d\varphi x+\varphi x.dfx$.

5) $d\left(\frac{\varphi x}{fx}\right)=\frac{fx.d\varphi x-\varphi x.dfx}{(fx)^2}$,

quæ quidem in elementis vulgo circumferuntur.

6) Ubique vero ulterius est $d\varphi z=\varphi_1 z.dz$, idque, si vel z functio alterius quantitatis x fuerit, ut $d(fx)^n=n.\widehat{fx}^{n-1}.dfx$.

Quia vero in prima differentiatione nihil interest, num φx & fx ipsius x an alius cujusdam quantitatis functiones fuerint, seu num dx an aliud differentiale constans fuerit, hæ eædem regulæ valebunt, si vel pro fx & φx variabiles quæcunque quantitates posuerimus, quarum signa f & ψ sint, ut ex. gr. Reg. 4) sit $d(f.\psi)=f.d\psi+\psi.df$.

Jam vero admissa regula per se patens $\underline{da=o}$, si generaliores quæsiveris regulas, facile observes, regulam 1) in 4), 2) in 3) atque 5) in 4) & 6) contineri, ut hæ solummodo supersint Reg. 3) $d(\varphi\pm\psi)=d\varphi\pm d\psi$, Reg. 4) $d(\varphi.\psi)=(\varphi.d\psi)+(\psi.d\varphi)$ atque Reg. 6) $d\varphi(u)=\varphi_1 u.du$, seu $d\varphi(fx)=$ $=\varphi_1 fx.f_1 x.dx$.

Sed & Reg. 3) & 4) revera nihil nisi casus quam maxime speciales *ejusdem regulæ universalioris* sunt, quæ quidem hæc est:

Si z functio aliqua functionum vel variabilium φ *et* ψ *vel etiam plurium fuerit, erit ipsius differentiale dz summa eorum differentialium, quæ ex regula* 6) *obtinentur, cum gradatim unaquæque harum functionum pro variabili* (*u*) *censetur.* Quæ quidem duæ regulæ quam

maxime *generales* nobis videntur. Ut si fuerit $z = \varphi^n . \psi^r$, erit pars ipsiu dz, quæ ex variatione ipsius φ obtinetur, (dum interea ψ constans habetur) $= \psi^r . d(\varphi^n) = \psi^r . n\varphi^{n-1} d\varphi$, alteraque ex ψ variante petenda $= \varphi^n . d(\psi^r) = = \varphi^n . r\psi^{r-1} d\psi$, ideoque totum $dz = n.\psi^r . \varphi^{n-1} d\varphi + r.\varphi^n \psi^{r-1} d\psi$, unde faciendo $n=1$ & $r=\pm 1$, mox regulas 4) & 5) petas.

Ad hanc vero regulam demonstrandam, ponamus $z = \varphi\psi$, quod signum jam haud necessarie productum ipsorum φ & ψ sed potius horum functionem quamcunque indicat, admittamusque primum, φ & ψ variabiles esse quæ tamen primo necessario haud una varient, sed maneat primum φ, mutetur vero ψ in $\psi^1 = \psi + rd\psi$, indeque fiat $z = \varphi\psi^1$, quod jam per z^1 indicamus atque ut functionem ipsius $\psi + rd\psi$ agnoscimus, eamque evolutu facilem. Quam igitur si per $\varphi(\psi^1)$ vel $\varphi(\psi + rd\psi)$ obiter indicamus, ut $\varphi\ (\ldots)$ jam nihil nisi functionis cujusdam signum sit, erit necessario ex Theoremate Tayloreo $z^1 = \varphi(\psi + rd\psi) = \varphi(\psi) + r.d\varphi(\psi) + ..$, atque $d\varphi(\psi) = \varphi_1(\psi).d\psi$, quod igitur jam differentiale est ipsius z, ex solo ψ variato oriundum, ideoque per $\underset{\psi}{dz}$ indicandum.

Similiter igitur si φ sola variat, atque in $\varphi^1 = \varphi + rd\varphi$ migrat, simul z in $\varphi^1\psi = (\varphi + rd\varphi)\psi$ migrabit, quod z_1 signetur & etiam per $\psi(\varphi + rd\varphi)$ exhibeatur, tumque eodem modo erit $z_1 = \psi(\varphi) + r.d\psi(\varphi) + \ldots$, atque $\underset{\psi}{dz} = d\psi(\varphi) = \psi_1(\varphi).d\varphi$.

Facile vero agnoscis $\varphi(\psi)$ & $\psi(\varphi)$ idem ac $\varphi\psi$ (vel z) valere, ea tantum diversitate, ut $\varphi\psi$ modo secundum ψ & modo secundum φ ordinata fuerit, seu z modo ut functio ipsius ψ & modo ipsius φ spectata fuerit; ideoque $\psi(\varphi) = \varphi\psi = \varphi(\psi)$.

Jam vero si φ & ψ ejusdem quantitatis x fuerint functiones, ideoque necessario cum x varient, ipsumque z variare faciant, (utut jam ipsius x aliqua functio), dicimus $dz = \underset{\psi}{dz} + \underset{\varphi}{dz}$ seu $= \psi_1(\varphi).d\varphi + \varphi_1(\psi).d\psi$ fore. Fiat x enim $x^1 = x + rdx$, ideoque $z ... (z) = z + rdz + ...$ & $\varphi ... \varphi^1 = \varphi + rd\varphi + r^2 \underset{c}{d}^2\varphi + \,.\,.\,.$ atque $\psi \,.\,.\,.\, \psi^1 = \psi + rd\psi + r^2 \underset{c}{d}^2\psi + \,.\,.\,.$, eritque jam $(z) = \varphi^1\psi^1 = (\varphi + r\Phi)(\psi + r\Psi)$, si $\Phi = d\varphi + r\underset{c}{d}^2\varphi + ...$ & $\Psi = d\psi + r\underset{c}{d}^2\psi + ..$ indicant; seu $(z) = \varphi^1(\psi + r\Psi)$, quod sane ut functio ipsius $\psi + r\Psi$ spectari evolvique potest, & ita fit $= \varphi^1(\psi) + r.(\varphi^1)_1(\psi).\Psi + r^2 h + ...$ Jam vero est $\varphi^1(\psi) = (\varphi + r\Phi)(\psi) = \psi(\varphi + r\Phi) = \psi(\varphi) + r\psi_1(\varphi).\Phi + r^2 f + ..$, atque similiter $(\varphi^1)_1(\psi) = (\varphi + r\Phi)_1(\psi) = \varphi_1(\psi) + r.F + ..$, ideoque (z) (seu z per x variatum) erit

$$\psi(\varphi) + r.\psi_1(\varphi).\Phi + ...$$
$$+ r.\varphi_1(\psi).\Psi + ...$$

ubi reliqui termini altiores ipsius r potentias continent, ideoque haud exponuntur; quin imo ex Φ & Ψ omnes omittendi sunt termini, qui r continent, ideoque soli $d\varphi$ & $d\psi$ retinendi, ut comparatio cum $(z) = z + rdz + ...$ ad dz inveniendum instituatur, quod igitur erit $= \psi_1(\varphi).d\varphi + \varphi_1(\psi).d\psi$, sicuti contendimus. Patet, si z aliqua ipsorum φ, ψ, χ &c. fuerit functio, eorumque vel ex arbitrio vel ab x pendentium, similiter demonstrari $dz = \underset{\psi}{dz} + \underset{\chi}{dz} + \underset{\zeta}{dz} + ..$, quæ quidem formula *generalissimam differentiandi regulam* exprimit; idque eo magis, cum hæc ad functiones quasvis plurium quantitatum variandas vim suam extendat. Facile enim observes, z ut functionem ipsorum φ & ψ, cum hæc in $\varphi + rd\varphi$ atque $\psi + rd\psi$ mutantur, ipsum in (z) variari, quod sub forma $z + rz_1 + ...$ explicuimus; jamque hoc z_1, quod $= \psi_1\varphi.d\varphi + \varphi_1(\psi)d\psi$ invenimus, *differentiale totum* ipsius z ex variatione ipsorum φ & ψ oriundum, nominare atque per dz vel $\underset{\varphi\psi}{d}\,z$ indicare licet; $\psi_1\varphi.d\varphi$ seu $\underset{\varphi}{d}\,z$ vero *differentiale particulare* secundum φ appellatur, $\psi_1\varphi$ (quod

& $\partial_{\varphi} z$ scribitur, vel $\frac{dz}{d\varphi}$!) vero *derivata* jam est *particularis.* Jam vero ad functiones unius variabilis redeamus.

Vides igitur, quoties quantitas z magis composita differentianda proponitur, in id incumbendum esse, ut ipsa secundum formam nota, (seu cujus differentiale secundum unumquodque argumentum, ut aggregati vel functionis algebraicæ plurium variabilium, invenire scias,) unius vel plurium simpliciorum functionum φ, φ, χ &c. agnoscatur functio.

Sic proposita functione rationali ipsius a^x, hanc in partes formæ $A(a^x)^n, \frac{B}{(b+a^x)^r}, \frac{(\alpha+\beta a^x)}{(c^2+2ca^x Cos.\gamma+a^{2x})^m}$ resolves, harumque differentialia

$$\Big[dA(a^x)^n = Ad(a^x)^n = An(a^x)^{n-1}da^x = Ana^{(n-1)x}a^x Ladx = Ana^{nx}Ladx\,,$$

$$d\left(\frac{B}{(b+a^x)^r}\right) = Bd(b+a^x)^{-r} = -Br(b+a^x)^{-r-1}d(b+a^x) = -\frac{Br.\,a^x La.dx}{(b+a^x)^{r+1}},$$

$$d\frac{(\alpha+\beta a^x)}{(c^2+2ca^xG+a^{2x})^m} = \frac{d(\alpha+\beta a^x)}{(c^2+2ca^xG+a^{2x})^m} + (\alpha+\beta a^x)d(c^2+2ca^xG+a^{2x})^{-m}$$

$$= \frac{\beta a^x Ladx}{(c^2+2ca^xG+a^{2x})^m} - (\alpha+\beta a^x).m(c^2+2ca^xG+a^{2x})^{-m-1}2(cG+a^x)a^xLadx$$

$$= \frac{a^xLadx.(\beta(c^2+2ca^xG+a^{2x})-2m(\alpha+\beta a^x)(cG+a^x))}{(c^2+2ca^xG+a^{2x})^{m+1}},\ \text{ubi}\quad G = Cos.\gamma,\Big]$$

inquiras deindeque in unum colliges.

Sin vero aliqua quantitas (z) tibi nimis composita videtur, ex reg. 6) $d\varphi z = \varphi_1 z.dz$, quæ $dz = \frac{d\varphi z}{\varphi_1 z}$ & igitur novam *differentiandi regulam* subministrat, talem perquiras functionem φ, qua si z afficitur, hæc in partes simpliciores resolvatur. Sic si z producti vel potentiæ forma gaudet vel etiam talem aliquomodo adsciscat, hujusmodi functio est Logarithmus L; cujus ideo derivatam,(quamquam specialia jam minus curamus), perquiramus.